

Il teorema della potenza meccanica

L'equazione di Cauchy può essere opportunamente modificata per ottenere l'espressione energetica del teorema della potenza meccanica:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \cdot \mathbf{f}_i + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \cdot \mathbf{v}_i \Rightarrow \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \right) = \rho \mathbf{v}_i \mathbf{f}_i + \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{v}_i T_{ik}) - T_{ik} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_k}$$

Integrando su V :

$$\int_V \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \right) dV = \int_V \rho \mathbf{v}_i \mathbf{f}_i dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{v}_i T_{ik}) dV - \int_V T_{ik} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_k} dV$$

Definiamo l'energia cinetica $\mathcal{E}_c = \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i dV$. Possiamo invertire l'ultimo integrale con la derivata:

$$\int_V \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \right) dV = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i dV = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \int_V \rho \mathbf{v}_i \mathbf{f}_i dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{v}_i T_{ik}) dV - \int_V T_{ik} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_k} dV$$

L'integrale $\int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{v}_i T_{ik}) dV$ contiene una divergenza e lo trasformiamo in un integrale di superficie:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{v}_i T_{ik}) dV = \int_S \mathbf{v}_i T_{ik} \mathbf{n}_k dS$$

Con $T_{ik} \mathbf{n}_k = t_i$. Possiamo inoltre introdurre le componenti del tensore deformazione nell'ultimo integrale:

$$\int_V T_{ik} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_k} dV = \int_V T_{ik} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial x_i} \right) dV = \int_V T_{ik} \cdot D_{ik} dV$$

Risulta quindi:

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \int_V \rho \mathbf{v}_i \mathbf{f}_i dV + \int_S \mathbf{v}_i t_i dS - \int_V T_{ik} \cdot D_{ik} dV$$

L'equazione dell'energia

Il primo principio della termodinamica, $dQ - dL = d\mathcal{E}$, può essere formulato, con riferimento al volume di fluido $V(t)$, in termini integrali (introducendo l'energia interna specifica e ricordando che l'energia totale è la somma di energia cinetica ed energia interna):

$$\frac{d\mathcal{E}_t}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho e_i dV + \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{1}{2} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i dV = \int_V \rho \mathbf{v}_i \mathbf{f}_i dV + \int_S \mathbf{v}_i t_i dS - \int_V q_i \mathbf{m}_i dS$$

In cui q_i è la componente i del flusso termico specifico. Isolando a questo punto $-\int_V T_{ik} \cdot D_{ik} dV = \frac{d\mathcal{E}_i}{dt} - \int_V \rho \mathbf{v}_i \mathbf{f}_i dV - \int_S \mathbf{v}_i t_i dS$ (summa l'energia interna):

$$\frac{d\mathcal{E}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho e_i dV = \int_V T_{ik} \cdot D_{ik} dV - \int_S q_i \mathbf{m}_i dS$$

Usando la divergenza per l'integrale di superficie, portando tutto in un unico integrale e osservando che l'equazione deve valere globalmente e localmente:

$$\int_V \left(\rho \frac{de_i}{dt} - T_{ik} \cdot D_{ik} + \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right) dV = 0 \Leftrightarrow \rho \frac{de_i}{dt} - T_{ik} \cdot D_{ik} + \frac{\partial q_i}{\partial x_j} = 0 \text{ ovvero } \rho \frac{de_i}{dt} = \mathbf{T} : \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

In parole non è possibile scindere il problema meccanico da quello termodinamico (in generale sono problemi accoppiati).